Miniatura 1

„Niewykonalne” konstrukcje

czyli

jak każdy może wykonać kwadraturę koła, trysekcję kąta i podwojenie sześcianu

Marek Kordos

Wprowadzenie

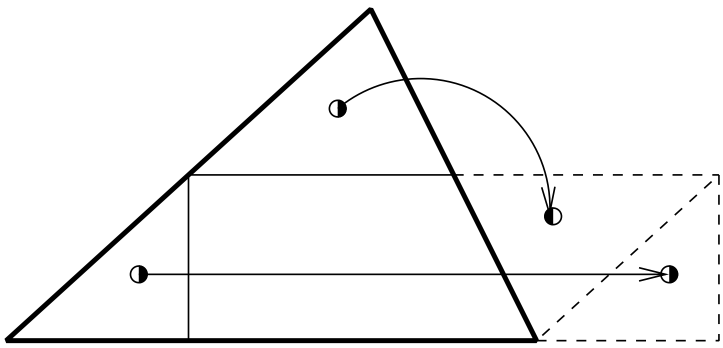
Powszechnie jest wiadomo, że zwrot *kwadratura koła* oznacza żądanie wykonania rzeczy niemożliwej. Zacznijmy więc od wykonania kwadratury koła, czyli skonstruowania kwadratu o polu równym polu danego koła. Ściślej – tu skonstruujemy trójkąt o polu równym polu danego koła.

Najpierw twierdzenie mówiące o kwadraturze dowolnego wielokąta i to najprostszą metodą. Nazywa się ona *równoważność przez rozkład.* Polega zaś na tym, że daną figurę dzielimy na „przyzwoite” części (np. wielokąty) i z tych części układamy inną figurę – ta pierwsza figura i ta druga są wtedy równoważne przez rozkład. W szczególności można zastanawiać się nad tym, które figury są równoważne przez rozkład z kwadratem. Byłaby to ich kwadratura jeszcze bardziej intuicyjna, niż konstruowanie za pomocą cyrkla i linijki boku odpowiedniego kwadratu (choć w sumie na jedno to wychodzi, gdyż trzeba przecież jakoś opisać cięcie figury na części).

Twierdzenie 1. *Każdy wielokąt jest przez rozkład na mniejsze wielokąty równoważny z pewnym kwadratem.*

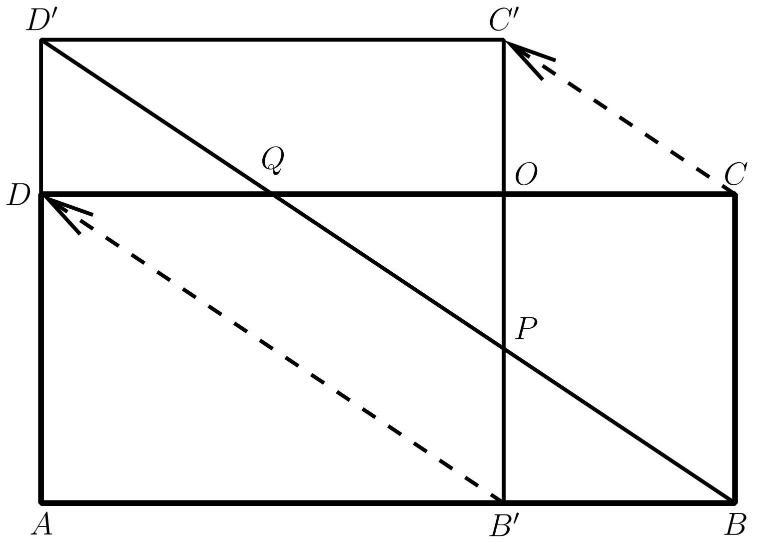
Twierdzenie to nazywane jest nazwiskami Farkasa Bolyaia (czytaj bojoja) i Paula Gerwiena (czytaj gerwina). Pierwszy z nich bardziej jest znany w historii matematyki z tego, że był ojcem współtwórcy geometrii nieeuklidesowej. Udowodnili oni to twierdzenie około 1800 roku, co oznacza jedynie tyle, że zapisali porządnie rozumowanie używane w matematyce od ponad 2200 lat. Oto ich dowód.

Dowód. Rysunek 1 pokazuje, że dowolny trójkąt można przeciąć na



RYSUNEK 1

(co najwyżej) 3 części, z których układa się prostokąt: pierwsze cięcie równoległe do podstawy w połowie wysokości, drugie prostopadłe do pierwszego. Jeśli otrzymany prostokąt ma stosunek boków mniejszy niż 4:1, to znowu można przeciąć go na 3 części, z których układa się kwadrat. Rysunek 2 pokazuje, jak to zrobić: aby z prostokąta $ABCD$ uzyskać kwadrat $AB'C'D'$, należy trójkąt BPB' przesunąć o wektor $\overrightarrow{B'D}$ (otrzymując trójkąt $QD'D$), a trójkąt BCQ przesunąć o wektor $\overrightarrow{CC'}$ (otrzymując trójkąt $PC'D'$). Aby to się dało zrobić, musi być $B'D \parallel BD' \parallel CC'$ i do wykazania tego sprowadza się ta część dowodu. Należy zastosować twierdzenie Talesa. Mianowicie prostokąt i kwadrat,



RYSUNEK 2

aby mogły być równoważne przez rozkład, muszą mieć te same pola. Oznaczając

$$\begin{aligned} a &= |AD| = |B'O| = |BC|, \\ b &= |AB| = |DC|, \\ c &= |AB'| = |DO| = |D'C'| = |AD'| = |B'C'|, \end{aligned}$$

mamy

$$c^2 = ab, \text{ czyli } \quad \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{b-c}{c-a},$$

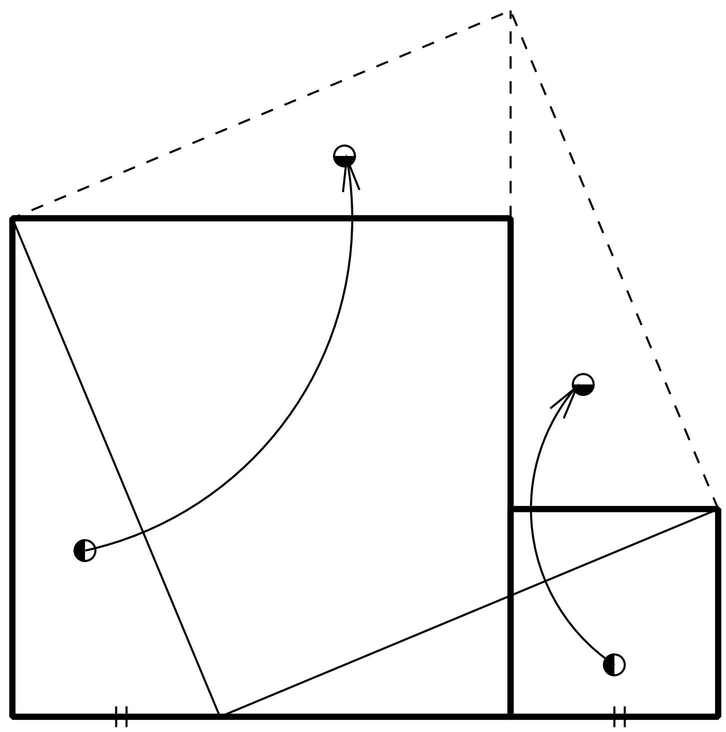
czyli

$$\frac{|AB|}{|AD'|} = \frac{|AB'|}{|AD|} = \frac{|OD|}{|OB'|} = \frac{|OC|}{|OC'|}.$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa daje, wobec trzeciej od końca równości, $BD' \parallel B'D$, a wobec ostatniej – $DB' \parallel CC'$. Można więc takie przesunięcia wykonać.

Gdy prostokąt jest zbyt długi, części trójkątów, które mielibyśmy przesuwać, leżą poza tym prostokątem. Ale łatwo znaleźć radę – należy dotąd składać prostokąt „na pół”, aż warunek, aby żaden z boków nie był więcej niż 4 razy dłuższy od pozostałego, będzie spełniony. Tak więc każdy prostokąt, a więc i każdy trójkąt, da się przez pocięcie na mniejsze wielokąty i ułożenie ich w inny sposób zamienić na kwadrat.

A teraz dowód dla dowolnego wielokąta. Wielokąt daje się podzielić na trójkąty, każdy z nich jest równoważny kwadratowi, a więc dowód byłby zakończony, gdybyśmy umieli z dwóch kwadratów zrobić jeden (w ten sposób zmniejszalibyśmy liczbę kwadratów, aż w końcu zostałby jeden). Ale to nie jest trudne. Ustawiamy kwadraty jeden obok drugiego i dwoma cięciami robimy z nich pięć części (rysunek 3). Obracając



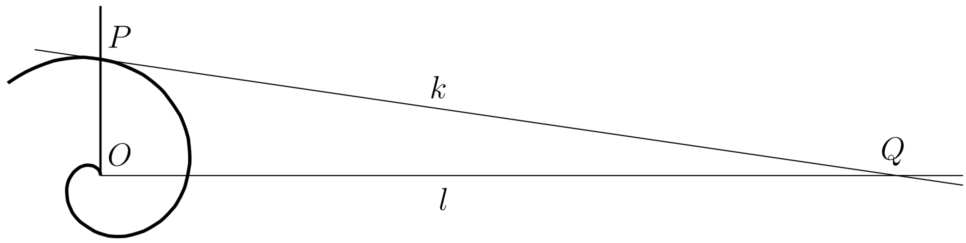
Rysunek 3

powstałe trójkąty o kąt prosty (jeden z trójkątów jest w dwóch kawałkach), otrzymujemy jeden kwadrat. I w ten sposób zakończyliśmy dowód twierdzenia Bolyaia–Gerwiena. □

W szczególności trójkąt jest równoważny przez rozkład kwadratowi. Jeśli więc wskażemy trójkąt o polu równym polu koła, kwadraturę będzie można łatwo zakończyć. Niby więc zrobimy mniej, ale za to wykonamy przy okazji (już dokładnie) *rektyfikację* (czyli wyprostowanie) okręgu, to znaczy wskażemy odcinek o długości równej długości okręgu.

Nie należy, rzecz jasna, wyobrażać sobie, że te konstrukcje powstały na użytek tego artykułu. Wykonał je żyjący w czasach Hannibala (czyli ponad 2200 lat temu) na Sycylii grecki uczony Archimedes (głównie matematyk, choć w szkole obecny jedynie na lekcjach fizyki).

Nikogo zatem nie zadziwi, że podstawowy przyrząd, którego trzeba będzie użyć do kwadratury, to spirala Archimedesa. Spirala Archimedesa to krzywa, jaką zakreśla punkt P znajdujący się na półprostej, obracającej się ruchem jednostajnym wokół swojego początku O, który to punkt P równocześnie jednostajnym ruchem oddala się od tego początku (rysunek 4). Podobna jest (względem stołu) droga muchy,



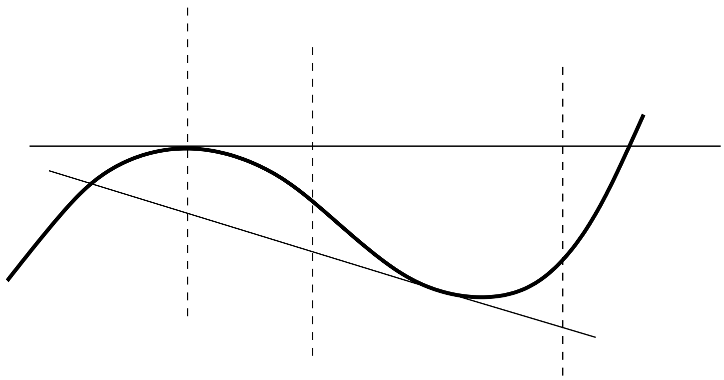
Rysunek 4

która oddala się, idąc równym krokiem, od środka obracającego się na adapterze krążka winylowej płyty (gdy ktoś wie, co to jest adapter i winylowa płyta; muchy są wciąż znane). Taka krzywa we współrzędnych biegunowych ma równanie $r = a\varphi$ (gdzie a jest pewną liczbą dodatnią), bo z racji tego, że oba ruchy są jednostajne, kąt obrotu i odległość od O są proporcjonalne.

W punkcie P spirali, odpowiadającym obrotowi o kąt 2π (czyli kąt pełny, bo będziemy mierzyli kąty w mierze łukowej), rysujemy styczną k do spirali. Gdy Q jest punktem przecięcia k z prostą l przechodzącą przez O i prostopadłą do OP (rysunek 4), to odcinek OQ ma długość $2\pi|OP|$, czyli jest rektyfikacją okręgu o promieniu OP, a trójkąt OPQ

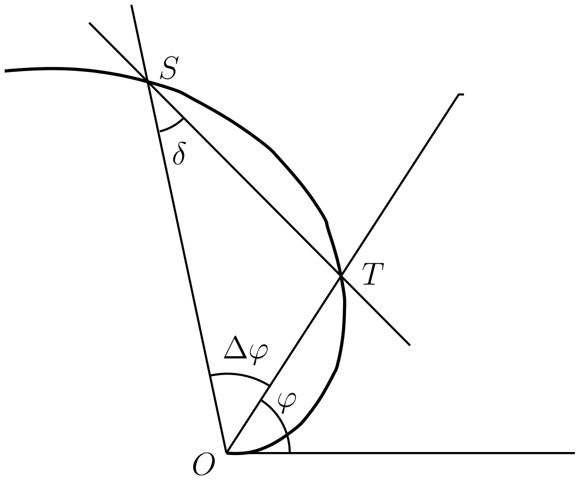
ma pole równe polu koła o tym promieniu, czyli również decydujący krok w kwadraturze został wykonany. Dlaczego tak rzeczywiście jest? Aby się o tym przekonać, trzeba dowiedzieć się, jaki kąt tworzy styczna w dowolnym punkcie spirali Archimedesa z odcinkiem łączącym ten punkt z punktem O. To z kolei wymaga sprecyzowania pojęcia *styczna*.

Styczna jest w matematyce określona jako *graniczne położenie siecznych*, co oznacza końcowy wynik następującej operacji: przez dwa niezbyt odległe punkty krzywej prowadzimy prostą (czyli sieczną), a następnie punkty zsuwamy – prosta się porusza, a jej końcowe położenie to właśnie styczna. Rysunek 5 uzasadnia, dlaczego stwierdzenie, że styczna to prosta mająca z krzywą tylko jeden punkt wspólny, jest prawdziwe tylko dla bardzo specjalnych krzywych (np. okrąg, elipsa), a w ogólnym przypadku zawodzi – warunek ten często nie daje niektórych stycznych, równocześnie proponując zbyt wiele (jak np. w przypadku krzywej określonej równaniem $y = x^3 - x$).



Rysunek 5

Weźmy więc dwa niezbyt odległe punkty spirali Archimedesa S i T i zajmijmy się trójkątem STO. Kąt obrotu odpowiadający punktowi T nazwijmy φ, kąt TOS oznaczmy $\Delta\varphi$, a kąt TSO oznaczmy δ (rysunek 6). Chodzi nam o znalezienie wartości δ, gdy $\Delta\varphi$ zmniejszymy do zera.



RYSUNEK 6

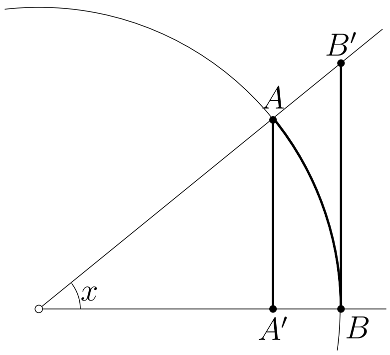
Dygresja o stosunku x do $\sin x$. Gdy się bada zachowanie wyrażeń trygonometrycznych dla małych kątów, jedyną konieczną informacją, poza standardowymi tablicowymi wzorami pozwalającymi zamieniać jedne funkcje na inne, jest znajomość tego, co się dzieje ze stosunkiem $\dfrac{x}{\sin x}$, gdy x zmniejszamy do zera. Pięknej odpowiedzi na to pytanie udzielił Euler, wykorzystując twierdzenie o dwóch policjantach. Zacznijmy więc od tego twierdzenia. Brzmi ono:

Twierdzenie 2 (o dwóch policjantach)**.** *Gdy będziesz się stale znajdował pomiędzy dwoma policjantami zmierzającymi na ten sam posterunek, i ty tam trafisz.*

A oto jego zastosowanie w rozważanej sytuacji.

Gdy nieduży kąt o wierzchołku O przetniemy okręgiem o promieniu 1, otrzymując punkty A i B, a następnie wystawimy w A i B prostopadłe do OB, otrzymując w ich przecięciach z ramionami kąta dodatkowe punkty A' i B' (rysunek 7), to

– łuk AB ma długość równą rozwartości kąta AOB,
– odcinek AA' ma długość równą sinusowi tego kąta,
– odcinek BB' ma długość równą tangensowi tego kąta.



Rysunek 7

Mamy więc (oznaczając rozwartość kąta AOB przez x)

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{czyli} \quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Policjant 1 stoi nieruchomo na posterunku 1, policjant $\dfrac{1}{\cos x}$ dla x zmniejszanego do zera zmierza na ten sam posterunek 1, zatem znajdujący się stale między nimi $\dfrac{x}{\sin x}$ też na ten posterunek trafi. Morał: przy zmniejszaniu x do zera stosunek $\dfrac{x}{\sin x}$ staje się równy 1. Tyle dygresji.

Powróćmy do spirali i rysunku 6. Zastosujemy do trójkąta STO twierdzenie sinusów:

$$\frac{\sin \angle TSO}{|TO|} = \frac{\sin \angle STO}{|SO|}, \quad \text{czyli} \quad \frac{\sin \delta}{a\varphi} = \frac{\sin(\pi - \delta - \Delta\varphi)}{a(\varphi + \Delta\varphi)}.$$

I trzeba trochę porachować. Mamy

$$(\varphi + \Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin(\delta + \Delta\varphi) = \varphi\sin\delta\cos\Delta\varphi + \varphi\cos\delta\sin\Delta\varphi,$$

zatem

$$(\varphi + \Delta\varphi - \varphi\cos\Delta\varphi)\sin\delta = \varphi\sin\Delta\varphi\cos\delta$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned}\operatorname{ctg}\delta &= \frac{1}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} - \frac{\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{1-\cos\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} = \\ &= \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \frac{2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}}{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}} = \frac{1}{\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\sin\Delta\varphi} + \operatorname{tg}\frac{\Delta\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Ponieważ $\operatorname{tg} 0 = 0$, więc (korzystając z dygresji) stwierdzamy, że gdy punkt T zsuwa się do punktu S, czyli gdy $\Delta\varphi$ zmniejsza się do zera, to $\operatorname{ctg}\delta$ staje się równy $\frac{1}{\varphi}$, czyli $\operatorname{tg}\delta$ staje się równy φ. Taki jest więc kąt między styczną w punkcie odpowiadającym kątowi obrotu φ a odcinkiem łączącym ten punkt z O. Taki „okrągły" wynik pozwala uzasadnić konstrukcję z rysunku 4.

Skoro na rysunku 4 kąt obrotu odpowiadający punktowi P jest równy 2π, to mamy

$$2\pi = \operatorname{tg}\angle OPQ = \frac{|OQ|}{|OP|},$$

skąd $|OQ| = 2\pi \cdot |OP|$, a o to właśnie chodziło.

Przedstawiona konstrukcja jest bardzo ładna, a jej uzasadnienie jest nie takie znów kłopotliwe. Czemu więc z uporem twierdzi się, że kwadratura koła jest niewykonalna? Powód jest, rzecz jasna, powszechnie znany – konstrukcje należy wykonywać

1° na płaszczyźnie,
2° jedynie cyrklem i linijką bez podziałki.

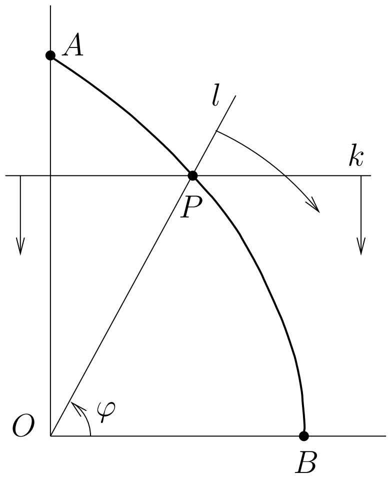
W podanej konstrukcji spełniony był tylko pierwszy warunek. No dobrze, ale dlaczego takie warunki zostały przez matematyczną społeczność przyjęte?

1. Inny sposób na kwadraturę

Można bez większego trudu wymyślić konstrukcję przyrządu do rysowania spirali Archimedesa. Pozostanie jednak problem, jaki przyrząd pozwoliłby konstruować styczną. Tak zaczynamy zbierać argumenty za odrzuceniem nieskrępowanej dowolności w wyborze środków konstrukcyjnych.

Chociaż akurat problem stycznej można usunąć, stosując do kwadratury zamiast spirali Archimedesa inną krzywą, *kwadratrysę*, wiązaną czasem z imieniem Dinostratosa (choć wiadomo, że nie on ją wymyślił).

Przepis na kwadratrysę jest bardzo podobny do przepisu na spiralę Archimedesa. Podobnie jak tam, mamy do czynienia z jednostajnym ruchem obrotowym i jednostajnym ruchem prostoliniowym. Teraz wygląda to tak, że mamy poziomą prostą k, która przesuwa się pionowo w dół ruchem jednostajnym. Równocześnie półprosta l, na początku pionowa, zaczyna się obracać jednostajnie wokół swojego początku O. Tempo obu ruchów jest tak dobrane, że prosta k dochodzi do punktu O akurat w tym momencie, gdy półprosta l staje się pozioma. Kwadratrysa to droga punktu P, w którym się przecinają k i l (rysunek 8).



RYSUNEK 8

Będziemy szukali równania kwadratrysy w biegunowym układzie współrzędnych. Jeśli więc współrzędne kartezjańskie P są (x, y), to interesuje nas, jak od φ zależy

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = x\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{x}{\cos \varphi},$$

(bo zawsze jest $y = x \operatorname{tg} \varphi$).

Niech w początkowym położeniu odległość k od O (czyli AO) będzie równa a. Warunek wiążący prędkość liniową z obrotową wygląda tak

$$\frac{a-y}{\frac{\pi}{2}-\varphi}=\frac{a}{\frac{\pi}{2}},\quad \text{czyli}\quad \frac{\pi}{2}a-\frac{\pi}{2}y=\frac{\pi}{2}a-\varphi a,\quad \text{zatem}\quad y=\frac{2a}{\pi}\varphi.$$

Stąd

$$\frac{2a}{\pi}\varphi=x\operatorname{tg}\varphi,\quad \text{czyli}\quad x=\frac{2a}{\pi}\varphi\operatorname{ctg}\varphi.$$

Gdy wstawimy to do pierwszego wzoru, otrzymamy

$$r=\frac{2a}{\pi}\varphi\frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\cos\varphi}=\frac{2a}{\pi}\frac{\varphi}{\sin\varphi}$$

i to jest właśnie poszukiwane równanie.

Kwadratura jest już właściwie zakończona. Korzystając z dygresji, znajdujemy $|OB|$, czyli odległość końcowego położenia P od O – odpowiada to sytuacji, gdy φ maleje do zera, jest więc

$$|OB|=\frac{2a}{\pi}.$$

Zauważmy, że mamy

$$\frac{4\cdot|OA|}{|OB|}=2\pi,$$

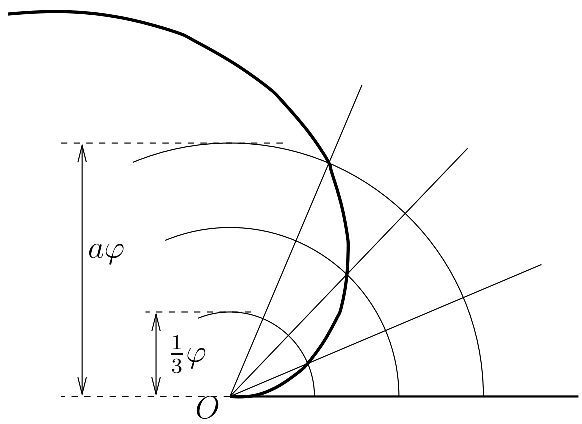
dysponujemy więc trójkątem podobnym do tego uzyskanego za pomocą spirali Archimedesa – do stosownej wielkości powiększamy go, posługując się twierdzeniem Talesa.

To, czy ta konstrukcja jest ładniejsza od tej ze spiralą Archimedesa, pozostaje kwestią osobistego gustu. Pytanie, czy uznać tego rodzaju konstrukcje za dopuszczalne w geometrii, wymaga natomiast jakiegoś porozumienia zainteresowanych. Zanim opiszę, jak do takiej umowy doszło, chcę przedstawić jeszcze inne konstrukcje.

2. Trysekcja i konchoidy

Trysekcja kąta to konstrukcja pozwalająca dla dowolnego kąta uzyskać kąt mający jedną trzecią jego rozwartości. Dla dowolnego kąta – a więc fakt, że potrafimy podzielić na trzy równe części np. kąt o rozwartości $\frac{\pi}{4}$, czyli mówiąc po ludzku: kąt 45°, nie świadczy jeszcze o wykonalności trysekcji.

Oczywiście, z tak potężnym orężem, jak spirala Archimedesa, łatwo jest wykonać nie tylko trysekcję, ale i n-sekcję (czyli podział na n równych części) dowolnego kąta. Połóżmy kąt tak, aby jego jedno ramię odpowiadało kątowi 0 spirali (rysunek 9). Drugie ramię kąta od-

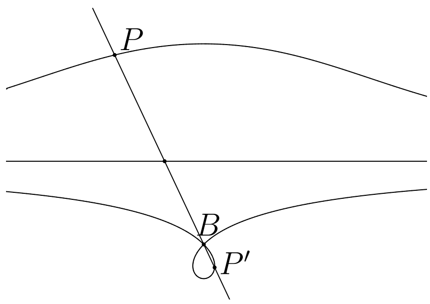


Rysunek 9

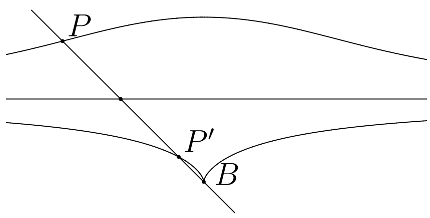
powiada pewnemu kątowi φ i przecina spiralę w odległości $d = a\varphi$ od jej początku O. Dzielimy d na n równych części (np. za pomocą twierdzenia Talesa – chyba każdy to potrafi?) i kreślimy okręgi o środku w punkcie O, przechodzące przez kolejny punkt tego podziału. Okręgi przecinają spiralę w punktach wyznaczających n-te części kąta φ (na rysunku 9 jest $n = 3$). Rzeczywiście, np. w przecięciu spirali z okręgiem o promieniu $\frac{d}{n}$ otrzymujemy punkt, dla którego jest $r = a\frac{\varphi}{n}$.

Można jednak zapytać, czy nie da się wykonać trysekcji dowolnego kąta prościej, bez aż tak skomplikowanych urządzeń, które rysowałyby spiralę Archimedesa. Okazuje się, że Starożytni znali taki sposób – wykorzystuje on bardzo prosty przyrząd: *konchoidograf*, czyli ten, który rysuje konchoidy. Z każdą krzywą jest mianowicie związana pewna inna krzywa – jej *konchoida*. A przepis na konchoidę jest bardzo prosty.

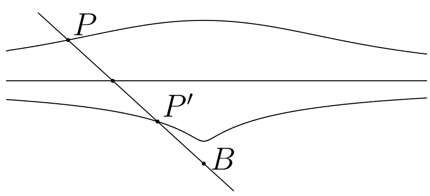
Najpierw obieramy pewien punkt B – będzie to *biegun konchoidy* – i pewną liczbę dodatnią a – będzie to *promień konchoidy.* A samą konchoidę otrzymujemy w ten sposób, że na każdej prostej przechodzącej przez biegun i przecinającej daną krzywą zaznaczamy dwa punkty: oba odległe o a od punktu przecięcia prostej z krzywą. Wygląd konchoidy zależy zarówno od krzywej, dla której ją wykreślamy, jak też od położenia bieguna i wielkości promienia. Na rysunkach 10, 11, 12 pokazane



Rysunek 10

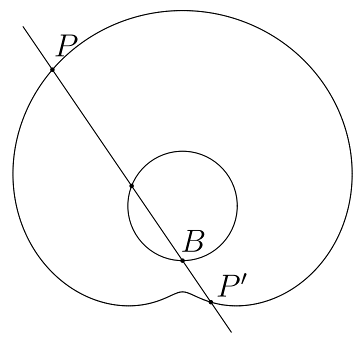


Rysunek 11

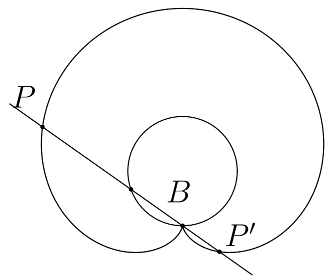


Rysunek 12

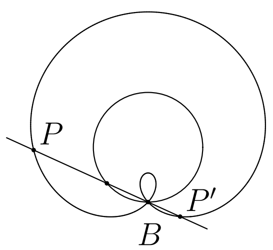
są różne wyglądy *konchoid Nikomedesa*, czyli konchoid prostej z biegunem nieleżącym na niej, a na rysunku 13, 14, 15 różne wyglądy *ślimaków Pascala*, czyli konchoid okręgu z biegunem leżącym na nim.



Rysunek 13



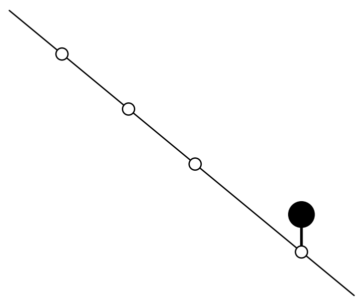
Rysunek 14



Rysunek 15

Nazwa ślimak nie jest tu nieodpowiednia: *konche* to po grecku muszla – nie wiem, czy obejrzenie sześciu powyższych obrazków uzasadnia dopatrzenie się w konchoidach jakichś związków z mięczakami.

Przyrząd do wykonywania konchoid, konchoidograf, to prosty drut z trzema pętelkami w równych odległościach oraz wysoka pinezka, gwóźdź lub tp. Wbijamy pinezkę w biegun, w pętelki wkładamy kolejno pisak dobry, wypisany i znów dobry – gdy wypisanym pisakiem wodzimy po krzywej, cały czas pilnując, by drut opierał się o pinezkę, to oba dobre pisaki rysują konchoidę (rysunek 16).

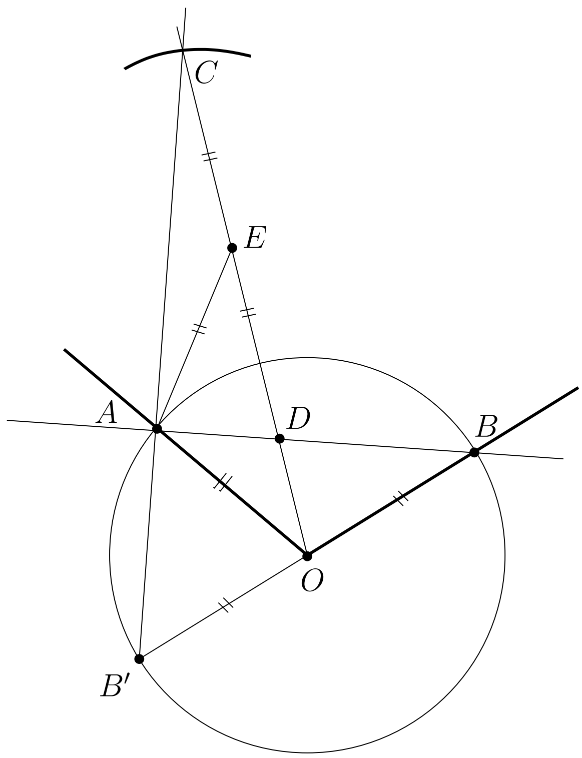


Rysunek 16

Tak jak kojarzenie jednostajnych ruchów po prostej i po okręgu często prowadzi do kwadratury koła, tak z konchoidami związane są trysekcje.

Oto dwa sposoby wykonania trysekcji kąta za pomocą konchoidy. Za pierwszym razem będzie to konchoida Nikomedesa, za drugim zaś ślimak Pascala. Dokładniej, będą to konstrukcje za pomocą cyrkla, linijki bez podziałki i konchoidografu – jeśli się jednak tym konstrukcjom dobrze przyjrzeć, to można zauważyć, że sam konchoidograf też wystarczy.

Dany jest kąt o wierzchołku O. Rysujemy okrąg o środku O i promieniu a, otrzymując w przecięciu z ramionami kąta punkty A i B. Prowadzimy w tym okręgu średnicę BB'. Przecinamy zewnętrzny łuk konchoidy prostej AB o biegunie O i promieniu $2a$ z prostą AB', otrzymując punkt C (rysunek 17 – łuk zewnętrzny to leżący po przeciwnej stronie prostej niż biegun). Kąt AOC jest jedną trzecią kąta AOB.



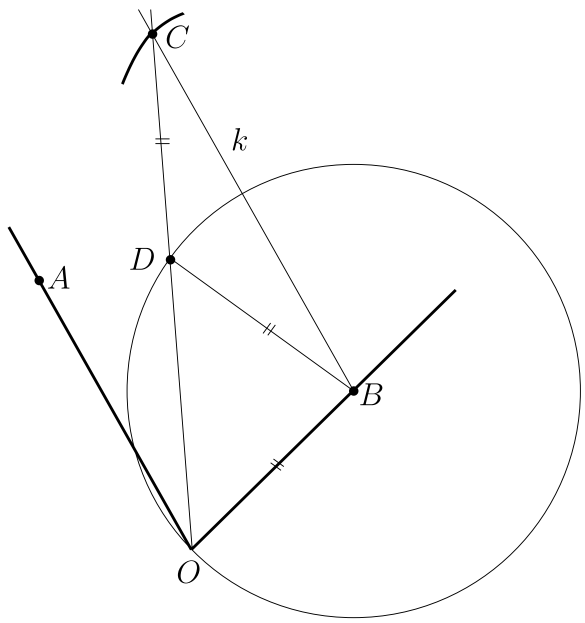
Rysunek 17

Dlaczego? Aby się o tym przekonać, dogodnie jest dorysować punkt D będący przecięciem AB z OC i środek E odcinka CD. Jeśli zauważymy, że kąt BAB' jest prosty (bo oparty na średnicy), to trójkąt ACD okaże się prostokątny i stąd będziemy mieli na rysunku aż sześć odcinków długości a: OA, OB, OB', EC, ED i EA (bo środek okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym leży na środku przeciwprostokątnej). Dalej trzeba już tylko pamiętać, że kąt zewnętrzny w trójkącie to suma kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych. Oznaczając $\alpha = \angle ACE$ i biorąc pod uwagę trójkąt ACE, mamy $2\alpha = \angle AEO = \angle AOE$ – wystarczy więc obliczyć, że $\angle COB = 4\alpha$. Ale z trójkąta ACO mamy

$$3\alpha = \angle B'AO = \angle AB'O$$

i wobec tego z trójkąta $B'CO$ mamy tezę.

Drugi sposób jest bodaj jeszcze bardziej elegancki. Nieco bardziej skomplikowana jest konstrukcja, ale za to rachunki znacznie prostsze. Dany jest kąt AOB, przy czym $OB = a$. Rysujemy okrąg o środku B i promieniu a oraz prostą k przez B równoległą do OA. Następnie przecinamy zewnętrzny łuk konchoidy narysowanego okręgu, o biegunie O i promieniu a, z k otrzymując punkt C (rysunek 18 – łuk zewnętrzny, to znaczy leżący na zewnątrz okręgu). Kąt AOC to jedna trzecia kąta



Rysunek 18

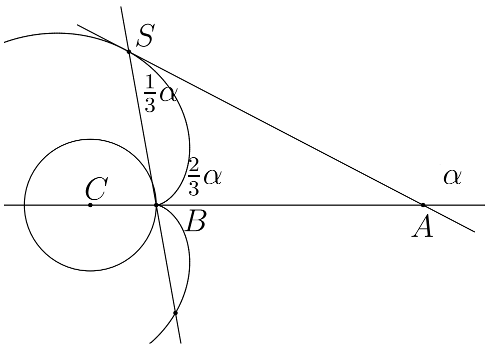
AOB. Dla dowodu oznaczmy jeszcze przez D punkt przecięcia OC z okręgiem. Mamy teraz $OB = BD = DC$, co pozwala przeprowadzić następujący rachunek

$$\angle AOC = \angle BCO = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle BDO = \frac{1}{2}\angle BOC;$$

pierwsza równość bierze się z faktu, że OA i BC są równoległe.

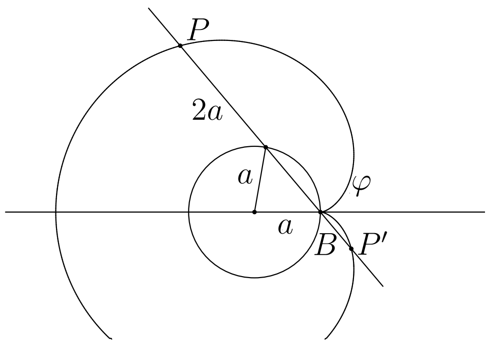
I jeszcze trzecia konstrukcja trysekcji kąta za pomocą konchoidy, a konkretnie ślimaka Pascala o promieniu średnicy okręgu. Taki ślimak

Pascala nazywa się *kardioida*. Poprowadźmy styczną do kardioidy (w punkcie S) i niech ona przecina półprostą łączącą środek okręgu, dla którego jest narysowana kardioida, z jej biegunem B w punkcie A (rysunek 19). Kąt ASB jest dwa razy mniejszy od kąta ABS, z czego



RYSUNEK 19

wynika, że stanowi jedną trzecią kąta zewnętrznego trójkąta ABS. Jak to uzasadnić? Odstąpię tu tę przyjemność Czytelnikowi. Początek jest



RYSUNEK 20

taki: jak widać z rysunku 20, w układzie biegunowym kardioida okręgu o promieniu a ma równanie

$$r = 2 \cdot a \cdot \cos(\pi - \varphi) + 2a = 2a(1 - \cos\varphi).$$

Następnie należy postąpić dokładnie tak, jak w przypadku stycznej do spirali Archimedesa – kluczowym wzorem, który znajdzie tu zastosowanie, będzie

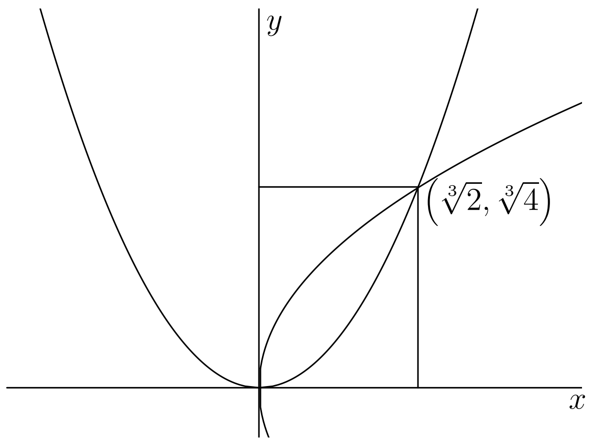
$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Przypuszczam, że wrażenia z przedstawionych tu trysekcji są zdecydowanie korzystne i pracują na niekorzyść ograniczania środków konstrukcji do cyrkla i linijki bez podziałki. Konchoidograf jest przyrządem zdecydowanie tej samej klasy złożoności, czemu więc go odrzucać?

3. Delos, Pytia, Archytas i Platon

Kwadratura koła, trysekcja kąta wraz z podwojeniem sześcianu nazywane są problemami delijskimi. Dlaczego? Faktycznie nazwa ta przysługiwać powinna tylko ostatniemu zadaniu. Według legendy, gdy przed blisko trzema tysiącami lat wybuchła w greckim mieście Delos zaraza, przerażeni mieszkańcy wysłali delegację do świątyni Apollina do Delf. Tam, odurzona oparami z palonych na trójnogu ziół, kapłanka, zwana Pytią, w imieniu swego patrona odpowiadała i wieszczyła przybyłym pątnikom. Na pytanie, co trzeba zrobić, by zaraza odstąpiła, poradziła mieszkańcom Delos, aby powiększyli dwukrotnie ich własny ołtarz Apollina, mający kształt sześcianu. Sądzę, że dziś nikt nie miałby z tym problemu – zbudowalibyśmy sześcian o dwa razy większej krawędzi i już. Grecy byli jednak (przynajmniej wówczas) skrupulatni i doszli do wniosku, że skoro ołtarz jest z litego brązu i skoro brąz kupuje się na wagę, to dwukrotnie większy oznacza *o dwukrotnie większej objętości*. My i z tym nie mielibyśmy problemu – zwiększylibyśmy krawędź np. 1,3 razy i uważalibyśmy zadanie za wykonane: $1{,}3^3 = 2,197$, a więc więcej niż 2. Ale nie Grecy – oni uważali, że Apollo żąda od nich, aby ołtarz był dokładnie dwa razy większy. I tak powstał problem podwojenia sześcianu. Do niego – już bez żadnej legendarnej podkładki – dołączono dwa poprzednio omawiane w tym artykule problemy. Połączyła je niemożność rozwiązania ich cyrklem i linijką.

Podwojenie sześcianu to poszukiwanie odcinka o długości $\sqrt[3]{2}$. Można go łatwo zbudować, gdy umie się kreślić parabole. Faktycznie, gdy narysujemy parabolę o równaniu $y = x^2$, czyli taką z nogami do góry, i parabolę $x = \frac{1}{2}y^2$, czyli taką z nogami w prawo, to przetną się one w dwóch punktach (rysunek 21). Jeden to oczywiście (0, 0). Współrzędne



Rysunek 21

drugiego obliczymy, podstawiając y z pierwszego równania do drugiego. Będzie to $x = \frac{1}{2}x^4$, czyli $x(x^3 - 2) = 0$. Zatem drugi punkt przecięcia ma współrzędne $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$. Tym samym problem podwojenia sześcianu jest rozwiązany. Przyrząd do kreślenia paraboli można bez trudu zbudować z linijki, ekierki i sznurka. Starożytni jednak nie mieli zaufania do takich krzywych, jak parabola, czyli w każdym miejscu innych.

Z tamtych czasów pochodzi zupełnie inna konstrukcja, która – jak sto lat temu uczono w gimnazjach – stała się przyczyną przyjęcia ograniczeń środków konstrukcyjnych. Autorem tej konstrukcji jest Archytas z Tarentu, wybitny wojskowy i polityk, a także znakomity administrator i inżynier. Tu i ówdzie trafia się czasami nazwa *średnia proporcjonalna* jako określenie średniej geometrycznej – to pozostałość po metodzie Archytasa. Co to były średnie proporcjonalne (w liczbie mnogiej)? Otóż, gdy do liczb a i b dobierzemy takie liczby $c_1, c_2, \ldots, c_n$, że

$$\frac{a}{c_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c_2}{c_3} = \cdots = \frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{c_n}{b},$$

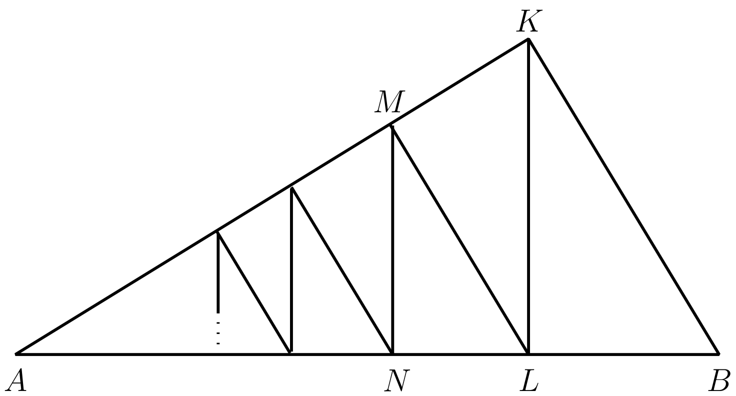
to liczby te stanowią n średnich proporcjonalnych między a i b. Faktycznie, jedna średnia proporcjonalna to średnia geometryczna.

Archytas zauważył, że możliwość znalezienia dwóch średnich proporcjonalnych dla a i $2a$ jest równoważna z podwojeniem sześcianu. Istotnie,

$$\text{z} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \text{wynika} \quad x^2 = ay \text{ i } y^2 = 2ax, \quad \text{czyli} \quad \frac{x^4}{a^2} = 2ax.$$

Ostatecznie mamy więc (poza rozwiązaniem zerowym) $x = a\sqrt[3]{2}$. A o to chodziło.

Pozostawał problem, jak konstruować dowolną liczbę średnich proporcjonalnych, a choćby tylko dwie. Jest figura, gdzie widać średnich proporcjonalnych, ile kto pragnie. To trójkąt prostokątny. Faktycznie, gdy zrzutujemy wierzchołek kąta prostego AKB na AB, otrzymując L, potem L na AK, otrzymując M, potem M na AB, otrzymując N itd., to mamy z podobieństwa trójkątów (rysunek 22)



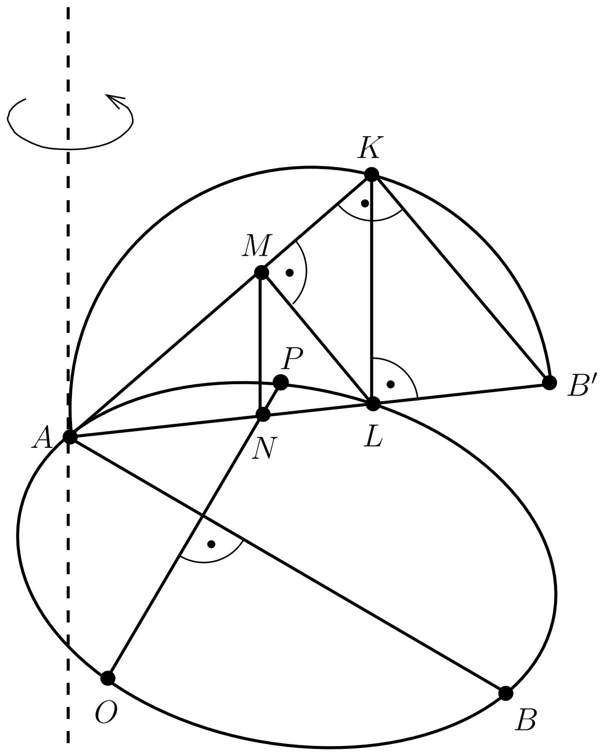
RYSUNEK 22

$$\frac{|AB|}{|AK|} = \frac{|AK|}{|AL|} = \frac{|AL|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|AN|} = \dots$$

Gdybyśmy więc umieli zbudować taki trójkąt prostokątny, w którym byłoby $|AM| = a$ i $|AB| = 2a$, to odcinek AL miałby długość $a\sqrt[3]{2}$. I taki właśnie trójkąt skonstruował Archytas.

Konstrukcja Archytasa była oparta o rozumowanie, które nazywa się *analiza Starożytnych* (i jeszcze pół wieku temu uczono o tym w szkole). Jest to następujący sposób. Zakładamy, że udało się i mamy (nie wiadomo skąd) to, o co chodzi – badamy zatem tę rzecz dotąd, aż uzbiera się tyle jej własności, że będziemy na ich podstawie rzeczywiście umieli tę rzecz znaleźć. Oto zastosowanie analizy Starożytnych do podwojenia sześcianu.

Zakładamy więc, że poszukiwany trójkąt prostokątny już mamy, rysujemy na poziomej płaszczyźnie okrąg o średnicy AB, trójkąt stawiamy pionowo i obracamy go względem pionowej osi przechodzącej przez A, aż punkt L znajdzie się na narysowanym okręgu (rysunek 23). Archytas wskazał trzy powierzchnie, na których znajduje się punkt K.



Rysunek 23

Pierwsze dwie łatwo wskazać: to walec, którego podstawą jest narysowany okrąg, i „torus bez dziurki”, czyli wynik obracania okręgu wokół jego stycznej – tutaj jest to okrąg opisany na ruchomym trójkącie prostokątnym.

Trzecią powierzchnią jest stożek o osi AB, wierzchołku A i kącie między osią a tworzącą równym $60°$. Jak na to wpaść? Narysujmy przez punkt N cięciwę OP narysowanego okręgu, prostopadłą do AB. Ponieważ trójkąt AML jest prostokątny, więc

$$|MN|^2 = |AN| \cdot |NL| = |ON| \cdot |NP|;$$

druga z równości wynika z podobieństwa trójkątów ANO i PNL (są podobne – prawda?). Ale skoro $|MN|$ jest średnią geometryczną $|ON|$ i $|NP|$, to trójkąt OMP jest prostokątny i można na nim opisać okrąg, dla którego OP jest średnicą i który leży w płaszczyźnie prostopadłej do AB. Proste z A przechodzące przez ten okrąg tworzą właśnie poszukiwany stożek. Ma on kąt między tworzącą a osią równy $60°$, bo $|AP| = |AO| = |AM| = a$, a taką sytuację znamy z konstruowania sześciokąta foremnego wpisanego w okrąg.

Archytas proponował więc następującą konstrukcję: budujemy walec, „torus bez dziurki" i stożek, otrzymany w ich przecięciu punkt rzutujemy prostokątnie na podstawę walca – jego (czyli punktu L) odległość od wierzchołka stożka to właśnie $a\sqrt[3]{2}$.

Skonstruować przyrząd zakreślający każdą z tych powierzchni Archytas umiał – zatem chyba rozwiązał problem podwojenia sześcianu? Okazało się jednak, że przede wszystkim wywołał awanturę z najwybitniejszym bodaj myślicielem tego czasu, Platonem. Aby przekonać wszystkich, że trudność matematyki to nic w porównaniu z zawiłościami poezji, pozwolę sobie tu zacytować relację z tej awantury przelaną na papier przez Cypriana Norwida.

PLATO I ARCHITA

ARCHITA

Geometrycznej nieświadom nauki
Widziałem prosty lud, kładący bruki,
I, jako kamień jedna się z kamieniem,
Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –
Aż żal mi było *bezwiedności* gminu,
Mimo że wieczną on jest *wagą czynu*!...
Więc – Geometrii myślane promienie

(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenię,
Sferyczność w drzewie wykłuwszy toporem
Siłami ramion pchnę brązowe walce,
Promienne jeśli kołom natknę palce...
To – któż wie...
PLATO
Boskie zmysłowiąc obrysy,
Archito! – koturn rzucisz za kulisy –
Języka lotność niebieskiego zgrubisz[1],
Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz...

ARCHITA
O! Plato... padam przed *prawdy bez-końcem*,
I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,
Tak wielce wszystko przesiąkłe jest *słońcem*,
Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;
Dlatego świętych nie zniżę arkanów,
Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,
Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,
Z kres tych na Grecji idealnym herbie,
Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie
(Lubo promienność uroku w nich stygnie),
Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,
Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,
Sykulów mówię, na przykład, siedziba[2],
Tą siły ramion zmnożywszy *nauką*,
Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...
PLATO
Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – *sztuko*!...

Zapewne konstrukcja Archytasa wydała się Platonowi (a prawdopodobnie nie tylko jemu) zbyt skomplikowana. Poszukując obiektywnego wyróżnika, Platon wskazał na mechaniczność owej konstrukcji, a więc związanie sprawy ze zjawiskami fizycznymi, od których matematyka powinna być – jego zdaniem – wolna. Stąd pierwsze ograniczenie: postulat wykonywania konstrukcji w dwóch wymiarach, na płaszczyźnie,

[1]Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako *zdegradowanie kontemplacji*.

[2]To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej *mechaniki*, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył (*przypisy Poety*).

a więc obiekcie będącym nierealizowalną praktycznie idealizacją. Sam jednak dostrzegał, że, tak czy owak, wykonując w praktyce konstrukcję, posługujemy się jakimiś, z konieczności mechanicznymi, przyrządami.

Powstał więc problem, jak się od tego związku z materią uwolnić, jak wykazać, że przyrządy służą jedynie unaocznieniu pewnych, całkiem idealnych pojęć. I tu należy zwrócić uwagę na pewną wspólną własność prostych i okręgów. Otóż linie te ślizgają się po sobie i nie ma więcej linii płaskich mających tę własność. Można więc proste i okręgi traktować jako scharakteryzowane przez tę własność, a nie będące tylko idealizacją wyniku działania cyrkla i linijki.

Skoro już o tym mowa, to istnieje tylko jeden rodzaj linii przestrzennej, która ślizga się po sobie: linia śrubowa. To dlatego można na nią nakręcić mutrę, czyli nakrętkę. Jednak to, że tylko trzy rodzaje linii ślizgają się po sobie, jest faktem – mimo intuicyjnej oczywistości – dość skomplikowanym w dowodzie i zostało dowiedzione dopiero w XIX stuleciu. Platon też nie miał dowodu, że więcej takich linii płaskich nie ma, ale mocno w to wierzył.

Autorytet Platona był tak wielki, że uznanie przez niego jakichś działań za nienaukowe natychmiast pociągało za sobą powszechny ostracyzm. I w ten sposób wyrzucono z „przyzwoitej geometrii" konchoidograf, nie mówiąc już o bardziej skomplikowanych przyrządach. Geometria miała być statyczna i posługiwać się tylko idealnymi pojęciami. W szczególności konstrukcje miały być wykonywane tylko przez kreślenie na płaszczyźnie prostych i okręgów, krzywych bardziej idealnych od innych. Nie potrwało to długo. Wspomniany w przypisie Norwida, półtora wieku młodszy od Platona, Archimedes połączył geometrię z mechaniką, o czym już była mowa.

Czemu więc ograniczenie Platona na konstrukcje geometryczne dotrwało faktycznie do dziś? Tu trzeba odwołać się do specyfiki myślenia matematyków. Jeśli postawić przed nimi problem, a oni nie będą umieli go rozwiązać, to żadna siła ich od niego nie oderwie. Pytanie zaś o wykonalność cyrklem i linijką bez podziałki trzech omawianych w tym artykule konstrukcji okazało się niesłychanie trudne. Tym bardziej trudne, że w matematyce powoli rozwijała się technika dowodzenia, iż czegoś zrobić się nie da – jest to trudniejsze od „pozytywnych" dowodów. Ostatecznie niewykonalność podwojenia sześcianu i trysekcji kąta tymi środkami wykazał Pierre Wantzel w 1837 roku. Sprowadził on wykonalność tych konstrukcji do istnienia pierwiastków określonych równań. Chociaż wystarczy ograniczyć się do równań stopnia 3, to pozwolę sobie nie przedstawiać tu tych (bo są oddzielne) dowodów. Dla zaspokojenia ciekawości powiem tylko, że przykładem konstruowalnego kąta, którego trysekcja cyrklem i linijką nie da się wykonać, jest już, tak przecież przyzwoity, kąt 60°. Dowód niewykonalności cyrklem i linijką kwadratury koła (Ferdinand Lindemann, 1882) nie nadaje się zupełnie do tego rodzaju artykułu. Podobnie, jak liczący sobie ćwierć wieku wynik Lackovitcha, że koło można podzielić na skończoną (bardzo zresztą wielką) liczbę części (bardzo paskudnych), z których, po sprytnym przemieszczeniu, ułoży się kwadrat.