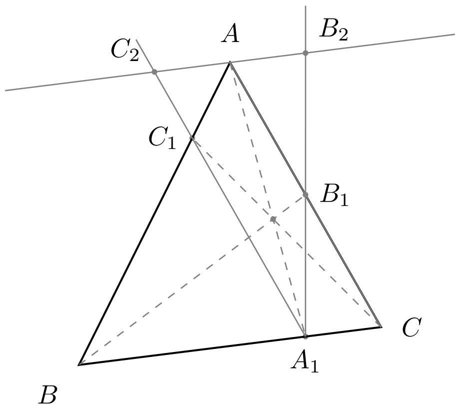
Oznaczenia

A, B, C *etc.*	– punkty na płaszczyźnie
$[AB]$	– odcinek, którego końcami są punkty A i B
$\|AB\|$	– długość odcinka AB
(AB)	– prosta przechodzącą przez punkty A i B
$\triangle ABC$	– trójkąt o wierzchołkach w punktach A, B, C
$\|\triangle ABC\|$	– pole trójkąta o wierzchołkach w punktach A, B, C
$\measuredangle ABC$	– kąt o wierzchołu B i ramionach zawartych w prostych (BA) i (BC)
$\measuredangle A, \measuredangle B$ etc	– wewnętrzy kąt w trójkącie przy wierzchołku A, B etc

1. Zadania

Zadanie nr 1 (5.74). *Na bokach* $[BC]$, $[CA]$ *oraz* $[AB]$ *trójkąta* $\triangle ABC$, *wybrano punkty* A_1, B_1 *oraz* C_1 *w taki sposób, że odcinki* $[AA_1]$, $[BB_1]$ *oraz* $[CC_1]$ *przecinają się w jednym punkcie. Proste* (A_1B_1) *oraz* (A_1C_1) *przecinają prostą przechodzącą przez wierzchołek* A *i równoległą do prostej* (BC) *odpowiednio w punktach* C_2 *oraz* B_2. *Uzasadnić, że* $|AB_2| = |AC_2|$.

Rozwiązanie zadania.



Zauważmy, że trójkąty $\triangle AC_1C_2$ oraz $\triangle A_1BC_1$ są podobne. Istotnie, kąty $\measuredangle A_1C_1B$ oraz $\measuredangle AC_1C_2$ mają takie same miary, jako kąty wierzchołkowe. Podobnie, kąty $\measuredangle BAC_1$ oraz C_1C_2A mają takie same miary (są to kąty naprzemianległe). Trójkąty $\triangle AC_1C_2$ oraz $\triangle A_1BC_1$ mają zatem odpowidające kąty o takich samych miarach. Z podobieństwa tych trójkątów wynika teraz, że

$$\frac{|AC_2|}{|BA_1|} = \frac{|AC_1|}{|C_1B|},$$

czyli

$$|AC_2| = |BA_1|\frac{|AC_1|}{|C_1B|}.$$

W całkiem podobny sposób uzasadnić można, że trójkąty $\triangle AB_1B_2$ oraz A_1B_1C również są podobne, a w konsekwencji

$$\frac{|AB_2|}{|A_1C|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|},$$

czyli

$$|AB_2| = |A_1C|\frac{|AB_1|}{|B_1C|}.$$

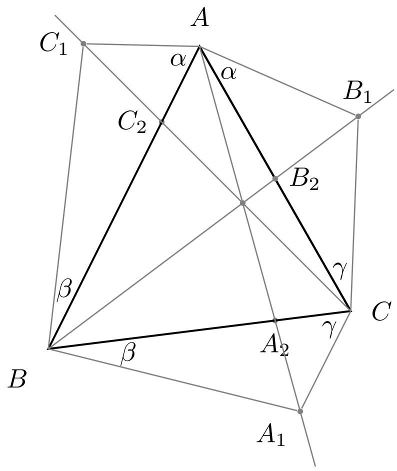
Dzieląc $|AC_2|$ przez $|AB_2|$ otrzymujemy

$$\frac{|AC_2|}{|AB_2|} = \frac{|AB_1|}{|B_1C|}\frac{|A_1C|}{|BA_1|}\frac{|C_1B|}{|AC_1|}.$$

Zauważmy, że prawa strona powyższego równania wynosi – na mocy twierdzenia Cevy dla trójkąta $\triangle ABC$ – jeden, zatem $|AC_2| = |AB_2|$.

Zadanie nr 2 (5.75). *Niech α, β, γ będą takimi kątami, że suma dowolnych dwóch z nich nie przekracza 180°. Na bokach trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano trójkąty $\triangle A_1BC$, $\triangle AB_1C$ oraz $\triangle ABC_1$ w taki sposób, że ich kąty przy wierzchołkach A, B, C równe są odpowiednio α, β, γ, a wierzchołki A_1, B_1, C_1 znajdują się za zewnątrz trójkąta $\triangle ABC$. Uzasadnić, że odcinki $[AA_1]$, $[BB_1]$ oraz $[CC_1]$ przecinają się w jednym punkcie.*

Rozwiązanie zadania.



Naszym celem będzie pokazanie, że zachodzi równość

$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|}\frac{|CB_2|}{|B_2A|}\frac{|AC_2|}{|C_2B|} = 1.$$

Wówczas z twierdzenia Cevy wynikać, bedzie, że odcinki $[AA_1]$, $[BB_1]$ oraz $[CC_1]$ przecinają się w jednym punkcie

Zauważymy na początek, że pole trójkąta $\triangle ABA_1$ liczyć możemy jako sumę pól trójkątów $\triangle ABA_2$ oraz $\triangle BA_1A_2$. Podobnie dla trójkąta $\triangle ACA_1$ (pole tego trójkąta jest sumą pól trójkątów $\triangle AA_2C$ oraz $\triangle A_1A_2C$). Ponieważ wysokości par trójkątów $\triangle ABA_2$ i $\triangle BA_1A_2$ oraz $\triangle AA_2C$ i $\triangle A_1A_2C$ są takie same, to

$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|} = \frac{|\triangle ABA_2|}{|\triangle ACA_1|}.$$

Ponadto ze wzoru na pole trójkąta wynika, że

$$\frac{|\triangle ABA_2|}{|\triangle ACA_1|} = \frac{|AB|\,|BA_1|\sin(\measuredangle B+\beta)}{|AC|\,|CA_1|\sin(\measuredangle C+\gamma)}.$$

Korzystając teraz z twierdzenia sinusów dla trójkąta $\triangle BA_1C$ otrzymujemy

$$\frac{|BA_1|}{\sin\gamma} = \frac{|CA_1|}{\sin\beta}.$$

Stąd zaś

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Z powyższego ciągu rozumować otrzymujemy teraz

$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|} = \frac{|AB|}{|AC|}\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\frac{\sin(\measuredangle B+\beta)}{\sin(\measuredangle C+\gamma)}.$$

Podobnie postępując w przypadku liczenia pól trójkątów $\triangle BCB_1$ i $\triangle BAB_1$ oraz $\triangle BCC_1$ i ACC_1 dostajemy zależności.

$$\frac{|CB_2|}{|B_2A|} = \frac{|BC|}{|AC|}\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\frac{\sin(\measuredangle C+\gamma)}{\sin(\measuredangle A+\alpha)}$$
$$\frac{|AC_2|}{|C_2B|} = \frac{|AC|}{|BC|}\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\frac{\sin(\measuredangle A+\alpha)}{\sin(\measuredangle B+\beta)}.$$

Mnożąc stronami trzy ostatnie równości otrzymujemy oczekiwaną równość.